

Proiezione ortogonale su di un sottospazio.



$$\Pi \cap \Sigma = \{P_1\}$$

oss: Se Σ è descritto da un sistema $AX=B \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1$ si ottiene risolvendo il sistema

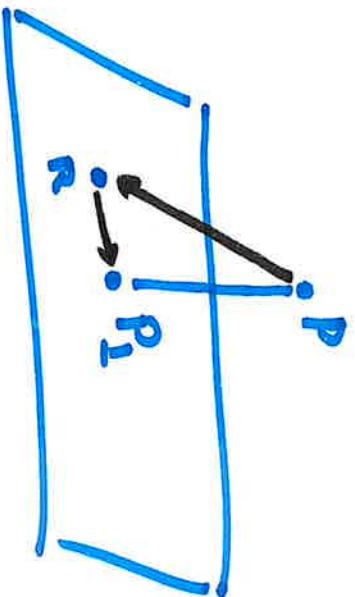
$$\begin{cases} \text{rank} \begin{pmatrix} X - X_P \\ A \end{pmatrix} = \text{rank}(A) \\ AX = B \end{cases} \xrightarrow{\Pi} \begin{cases} (X - X_P)^\perp U \\ U = L_R(A)^\perp \\ (X - X_P) \in U^\perp \end{cases}$$

Teorema: Sia $P \in E_n(\mathbb{R})$, $\Sigma = [a; b]$ un'oltrapietazione
e P_1 la proiezione ortogonale di P su Σ .

Allora $\forall R \in \Sigma: d(P, R) \geq d(P, P_1)$ e $d(P, R) = d(P, P_1)$
 $\Leftrightarrow P = P_1$.

$\rightarrow P_1$ è il punto di Σ più vicino a P

Dm:



$$\vec{PR} = \vec{PP_1} + \vec{P_1R}$$

$$\|\vec{PR}\|^2 = (\vec{PP_1} + \vec{P_1R}) \cdot (\vec{PP_1} + \vec{P_1R}) =$$

$$= \|\vec{PP_1}\|^2 + \|\vec{P_1R}\|^2 + 2(\vec{PP_1} \cdot \vec{P_1R})$$

perché $\vec{PP_1} \perp \vec{P_1R}$ $\vec{PP_1} \in \mathcal{M}^\perp$ $\vec{P_1R} \in \mathcal{M}$

$$\|\vec{PR}\|^2 = \|\vec{PP_1}\|^2 + \|\vec{P_1R}\|^2$$

è minimo $\Leftrightarrow \|\vec{P_1R}\| = 0$.

□

Def: Sia $P \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$, $\Sigma = [a; b]$ un sottospazio $\Rightarrow$
definiamo come distanza di P da Σ

$$d(P, \Sigma) := \min \{ d(P, X) : X \in \Sigma \}.$$

Per quanto visto prima $d(P, \Sigma) = d(P, P_\perp)$

ove $P_\perp$ = proiezione ortogonale di P su Σ .

N.B: $d(P, \Sigma) = 0 \Leftrightarrow P \in \Sigma$.

$$d(P, \{0\}) = d(P, 0)$$

OS: Sia $\pi : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$ un'iperpiano di $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

allora il vettore $\bar{n} = (a_1 \dots a_n)$ è ortogonale al

sottospazio di traslazione di π .

$$\text{Se } \pi = [\varphi; \mathcal{H}] \Rightarrow \mathcal{H}^\perp = \mathcal{L}(\bar{n}).$$

$$\mathcal{H} = \{ (x_1 \dots x_n) : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \} =$$

$$= \{ (x_1 \dots x_n) : (a_1 \dots a_n) \cdot (x_1 \dots x_n) = 0 \} =$$

$$= (a_1 \dots a_n)^\perp = n^\perp$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^\perp = \bar{n}^{\perp\perp} = \mathcal{L}(\bar{n}).$$

Si dice che $\bar{n}$ è una normale (o direttrice) a π .

$n=2$

$$\uparrow \bar{n} = (a, b)$$

$$\pi: ax + by + c = 0$$

$n=3$

$$\uparrow \bar{n} = (a, b, c).$$

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$



DISTANZA PUNTO/RETTA in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

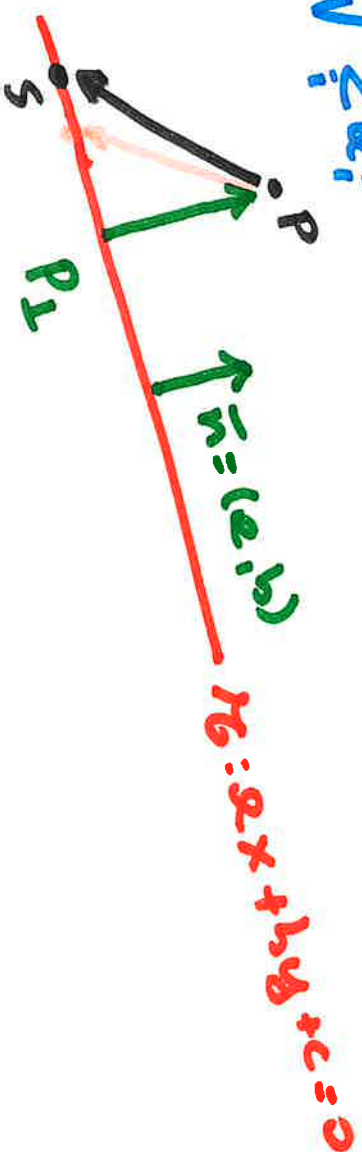
Siano $P = (x_P, y_P)$ ed $\pi: ax + by + c = 0$ un punto ed una retta in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$. Allora

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

→ più in generale se $P = (x'_1 \dots x'_n)$ e $\pi: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$ sono un punto ed una retta in $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ allora

ipercipiano

$$d(P, \pi) = \frac{|a_1 x'_1 + \dots + a_n x'_n + b|}{\sqrt{\sum_i a_i^2}}$$



D14

$\vec{P_1P_2}$ è la proiezione nella direzione $\vec{n}$
del vettore $\vec{PS}$ ove $S \in \pi$.

$$\vec{P_1P} = \frac{\vec{P_1P} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \quad \forall S \in \pi$$

$$S = (x_s, y_s) \quad \vec{n} = (a, b) \quad P = (x_p, y_p)$$

$$\frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \frac{[(x_s, y_s) - (x_p, y_p)] \cdot (a, b)}{(a, b) \cdot (a, b)} =$$

$$= \frac{ax_s + by_s - ax_p - by_p}{a^2 + b^2} = *$$

$$S \in \pi : ax_s + by_s + c = 0 \Rightarrow ax_s + by_s = -c$$

$$* = \frac{-ax_p - by_p - c}{a^2 + b^2}$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \right\| &= \left| \frac{ax_p + by_p + c}{a^2 + b^2} \right| \cdot \|\vec{n}\| = \\ &= \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \square \end{aligned}$$

oss: $\vec{PP}_L = \frac{(\vec{PS} \cdot \vec{n}) \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$

$$P_L = (x', y')$$

$$P = (x, y)$$

$$\vec{PP}_L = (x' - x, y' - y)$$

$$\Rightarrow P_L - P = \vec{PP}_L = (x', y') \quad \text{ma} \quad (x' - x, y' - y) = (a, b) \frac{(x' - x, y' - y) \cdot (a, b)}{(a, b) \cdot (a, b)}$$

$$(x' - x, y' - y) = (a, b) \frac{x'a - xa + y'b - yb}{a^2 + b^2} =$$

$$= (a, b) \frac{-xa - yb - c}{a^2 + b^2}$$

$$x' = a \left[\frac{-xa - yb - c}{a^2 + b^2} \right] + x = x \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) - \frac{ab}{a^2 + b^2} y - \frac{ac}{a^2 + b^2}$$

$$y' = b \left[\frac{-xa - yb - c}{a^2 + b^2} \right] + y = y \left(1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) - \frac{ab}{a^2 + b^2} x - \frac{bc}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T$$

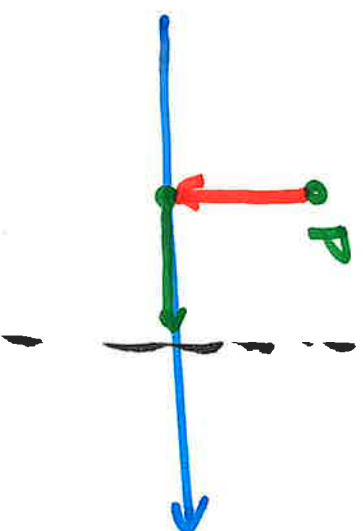
$$\det(M) = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} & -\frac{ab}{a^2+b^2} \\ -\frac{ab}{a^2+b^2} & 1 - \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$$

$$\det M = 1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} = 0$$

M é simétrica. $\Rightarrow n=2$ diagonalizável.

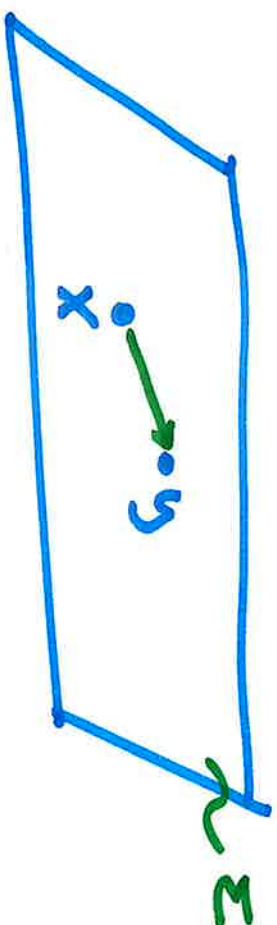
Qual novo eix de transformação?



$$r: ax + by + c = 0$$

$$(-b, a)$$

$$(a, b).$$



$$\begin{aligned} \pi(x) &= x & \Rightarrow \pi \circ \overrightarrow{xy} &= \overrightarrow{\pi(x)\pi(y)} \\ \pi(y) &= y \end{aligned}$$

DISTANZA FRA 2 SOTTOSPAZI. (DISGIUNTI).
euclidea

$$\rightarrow d(\pi, \Sigma) = \min \{ d(p, q) : p \in \pi, q \in \Sigma \}.$$

$$\text{se } \exists p \in \pi \cap \Sigma \Rightarrow d(\pi, \Sigma) = 0 \text{ ma } \pi \text{ a priori } \neq \Sigma.$$

$$d(\pi, \Sigma) = \min \{ d(P, \Sigma) \mid P \in \pi \}$$

$$= \min \{ d(P_\pi, \min \{ \|\vec{P}P_\perp\| \mid P_\perp \text{ proiezione di } P \text{ su } \Sigma \}) \}$$

$$= \min \{ d(\pi, Q) \mid Q \in \Sigma \}$$

$$= \min \{ \|\vec{Q_\pi} Q\| : Q_\pi \text{ proiezione di } Q \text{ ortogonale di } Q \text{ su } \pi \}$$

$$\vec{Q_\pi} Q \text{ è ortogonale a } \pi$$

$$\vec{P}P_\perp \text{ è ortogonale a } \Sigma$$

ci troviamo un vettore $\vec{XY}$ tale che

$$\vec{XY} \perp \pi, \vec{XY} \perp \Sigma, X \in \pi, Y \in \Sigma$$

allora sicuramente questo vettore è la distanza fra π e Σ .

Infatti: $\forall z \in \Sigma: \|\vec{xz}\| > \|\vec{xu}\|, z \neq u$

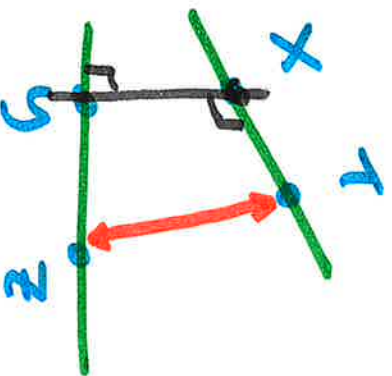
$\forall t \in \pi: \|\vec{tu}\| < \|\vec{xu}\|, t \neq x$

$$\|\vec{tz}\|^2 = \|\vec{tu} + \vec{ux} + \vec{xz}\|^2$$

$$= \cancel{(\vec{tu} + \vec{ux} + \vec{xz}) \cdot (\vec{tu} + \vec{ux} + \vec{xz})} = \cancel{\|\vec{tu}\|^2 + \|\vec{ux}\|^2 + \|\vec{xz}\|^2} + 2(\cancel{\vec{tu} \cdot \vec{ux}} + \cancel{\vec{tu} \cdot \vec{xz}} + \cancel{\vec{ux} \cdot \vec{xz}})$$

$$\vec{tz} = \vec{tu} + \vec{ux} + \vec{xz}$$

$$\|\vec{tz}\|^2 = (\vec{tu} + \vec{ux} + \vec{xz}) \cdot (\vec{tu} + \vec{ux} + \vec{xz}) =$$



$$\|\vec{Tx}\|^2 + \|\vec{x\vec{y}}\|^2 + \|\vec{y\vec{z}}\|^2 + 2(\cancel{\vec{Tx} \cdot \vec{x\vec{y}}} + \cancel{\vec{Tx} \cdot \vec{y\vec{z}}} + \cancel{\vec{x\vec{y}} \cdot \vec{y\vec{z}}}) =$$

$$= \|\vec{Tx}\|^2 + \|\vec{x\vec{y}}\|^2 + \|\vec{y\vec{z}}\|^2 + 2\vec{Tx} \cdot \vec{y\vec{z}} \geq$$

$$\text{mo } |\vec{Tx} \cdot \vec{y\vec{z}}| \leq \|\vec{Tx}\| \cdot \|\vec{y\vec{z}}\|$$

$$\geq \|\vec{x\vec{y}}\|^2 + (\|\vec{Tx}\| - \|\vec{y\vec{z}}\|)^2 \geq \|\vec{x\vec{y}}\|^2$$

□

$$-2\|\vec{Tx}\| \|\vec{y\vec{z}}\| \leq 2\vec{Tx} \cdot \vec{y\vec{z}} \leq 2\|\vec{Tx}\| \|\vec{y\vec{z}}\| \quad \text{c/s.}$$

DISTANZA FRA 2 RETTE. DISGIUNTE.

$n=2$



$n=3$.

$$n // \Delta \Rightarrow \forall Q, P \in n : d(P, \Delta) = d(Q, \Delta)$$

$$n: ax + by + c = 0$$

$$\Delta: a'x + b'y + c' = 0 \quad (a', b') = (a, b)$$

$$\Rightarrow d(P, \Delta) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$ax_P + by_P = -c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(P, \Delta) = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

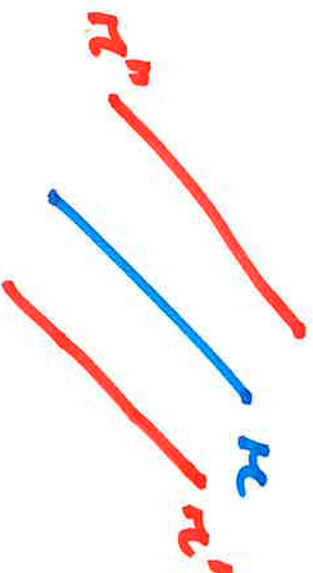
Viceversa il luogo dei punti a distanza d fissata da n risulta

$$\underline{|ax + by + c| = d \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow |ax + by + c| = d\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rightarrow ax + by + c \mp d\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

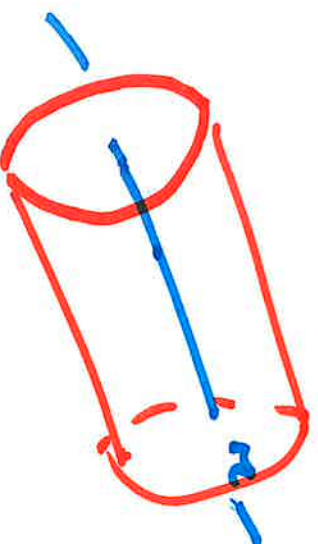
sono 2 rette parallele ad π



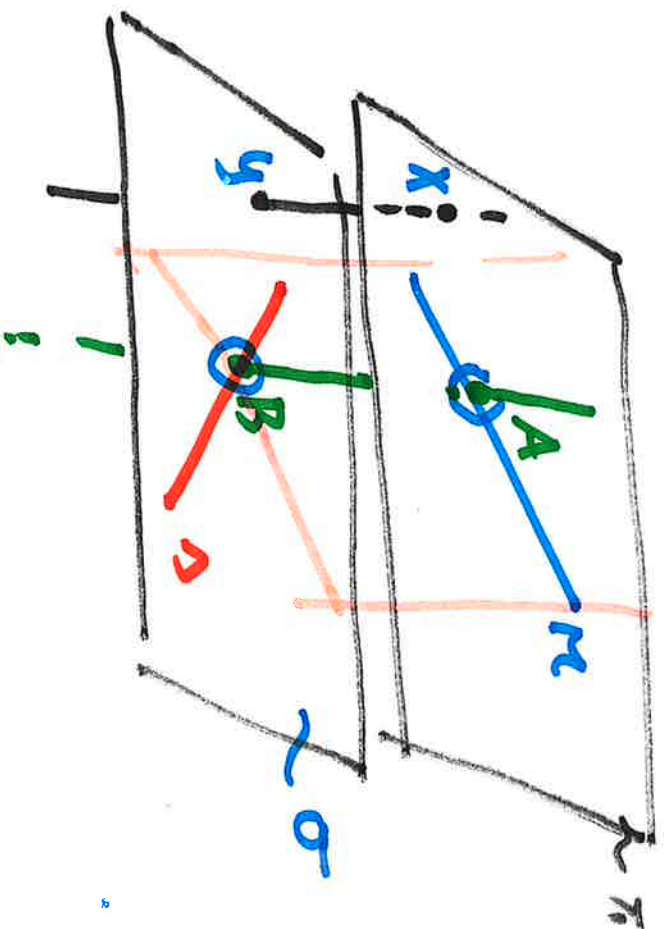
$n=3$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{rette complanari} \\ \text{rette sghembe} \end{array} \right.$



$\rightarrow \pi \cap n = \emptyset \Rightarrow \pi \parallel n \Rightarrow$ ogni punto di π
è alla stessa distanza da n e
viceversa ogni punto di n
è alla stessa distanza da π .



$$d(\pi, \sigma) = d(x, y)$$



$$d(\kappa, \gamma) \geq d(\pi, \sigma)$$

ne esiste una retta

che sia $t \perp \pi$, $t \perp \gamma \Rightarrow t \perp \pi$ e $t \perp \sigma$

t deve avere direzione $L(\bar{v}, \bar{w})^\perp$

e per ipotesi sia κ che $\gamma \Rightarrow d(\kappa, \gamma) = d(\pi, \sigma)$

$$\pi = [P, L(\bar{v})]$$

$$\gamma = [Q, L(\bar{w})]$$

ragionare $\Rightarrow$

$$\pi = [P, L(\bar{v}, \bar{w})]$$

$$\sigma = [Q, L(\bar{v}, \bar{w})]$$

sono 2 piani paralleli

$$\text{e } \pi \subseteq \pi$$

$$\gamma \subseteq \sigma.$$